Государственное бюджетное учреждение дополнительного образования Псковской области
«Псковский областной центр развития одаренных детей и юношества»

Областной конкурс «Юные дарования» 2018/2019

«Юный знаток математики»

Очный тур

7 класс

Задания и возможные решения

Внимание! Задача считается решенной, если, помимо правильного ответа, приведены необходимые объяснения и вычисления.

1. Можно ли число 2019 представить в виде суммы четырёх слагаемых, в десятичной записи каждого из которых используется только одна цифра, и в записи которых различное число цифр?

Ответ: можно

Решение. Искомое представление: 2019=1111+888+11+9.

2. Пусть x и y – нецелые числа и $\frac{1+y}{x-y}=x$. Докажите, что числа x и y отличаются на 1.

Преобразуем уравнение (при $x \neq y$) равносильным образом

$$\frac{1+y}{x-y} = x \Leftrightarrow 1+y = x(x-y) \Leftrightarrow 1+y = x^2 - xy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - x^2 = -y - xy \Leftrightarrow (1-x)(1+x) = -y(1+x).$$

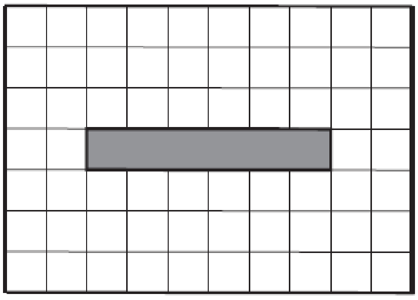
Так как число $1 + x$ отлично от 0 (иначе $x = -1$ целое), то $1 - x = -y$ и $x - y = 1$. Утверждение доказано.

3. На лесопилку привезли трёхметровые и четырёхметровые брёвна. Их распилили на метровые куски, причём каждым распилом пилили ровно одно бревно. Сколько сделано распилов, если вначале было тридцать брёвен суммарной длины сто метров?

Ответ: 70.

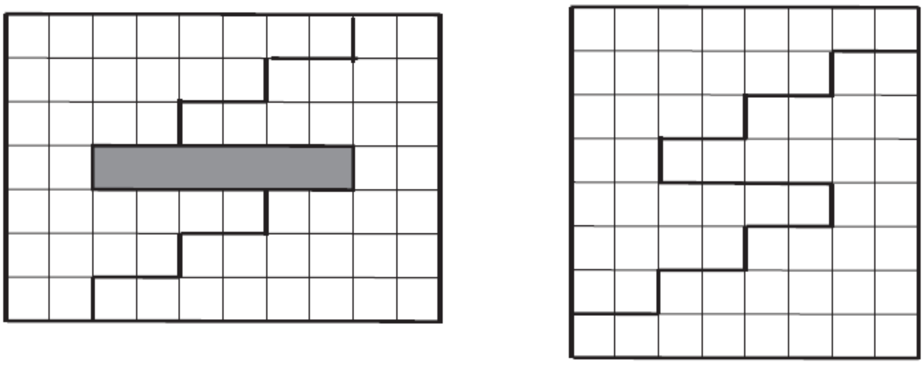
Первый способ. Суммарная длина бревен равна 100 метров. Если бы это было одно бревно, то понадобилось бы 99 распилов. Так как это 30 бревен, то 29 распилов уже сделано. Значит, осталось сделать еще 99 – 29 = 70 распилов.

<u>*Второй способ.*</u> Найдем количество бревен каждого вида. Если бы все были трёхметровые, то их суммарная длина была бы равна 90 метров. А так как она равна 100 метров, то всего есть 10 бревен по 4 метра и 20 бревен по 3 метра. Для каждого бревна длиной 4 метра потребуется три распила, а для каждого бревна длиной 3 метра – два распила. Итого: $10\cdot 3+20\cdot 2=70$ распилов.



4. В прямоугольнике 10 × 7 вырезали центральный прямоугольник 1 × 6 — см. рисунок. Разрежьте полученную фигуру на две равные части, чтобы из них можно было сложить квадрат 8 × 8. Покажите, как надо разрезать и как потом сложить.

Решение: Например, так, как показано на рисунке.



5. Имеется 5 внешне одинаковых ящиков, массы которых равны 10, 11, 12, 14 и 17 кг, а также электронные весы, которые показывают точную массу взвешиваемых предметов (на весы разрешается поставить любое количество ящиков). Можно ли за 3 взвешивания определить, какой ящик сколько весит?

<u>*Ответ:*</u> Можно

Решение 1. Будем взвешивать по 2 ящика. Обратим внимание, что все попарные суммы масс различны, поэтому по результату взвешивания можно однозначно определить, какая пара масс взвешивалась (21 = 10+11, 22 = 10+12, 23 = 11+12, 24 = 10+14, 25 = 11+14, 26 = 12+14, 27 = 10 + 17, 28 = 11+17, 29 = 12+17, 31 = 14+17). Обозначим ящики буквами A, B, C, D, E.

1) взвесим (A+B), определим пару масс (m1, m2).

2) взвесим (C+D), определим пару масс (m3, m4). По результатам двух взвешиваний мы знаем 4 массы, принимавших участие во взвешиваниях. Оставшаяся пятая масса – это масса ящика E.

3) взвесим (A+C), определим пару масс. Одна из них входит в пару (m1, m2) – это масса A, вторая входит в пару (m3, m4) – это масса C. Массы B и D – оставшиеся числа из пар (m1, m2) и (m3, m4) соответственно.

Решение 2. Аналогично решению 1 доказываем, что по результату взвешивания двух ящиков можно однозначно определить, какая пара масс взвешивалась. Обозначим ящики буквами A, B, C, D, E.

1) взвесим (A+B), определим пару масс (m1, m2).

2) взвесим (B+C), определим пару масс (m3, m4) Поскольку в оба взвешивания входит предмет B, какая-то масса входит в обе полученные пары – это масса ящика B. Оставшееся число из пары (m1, m2) – это масса ящика A, а из пары (m3, m4) – масса ящика C. Таким образом, мы определили массы трех ящиков.

3) взвесим D, определим его массу. Мы определили массы четырех ящиков, оставшаяся «свободной» пятая масса – масса E.

Замечание. Возможны другие алгоритмы взвешиваний.

Каждое задание оценивается в 7 баллов.