

Областной конкурс «Юные дарования» 2018/2019

«Юный знаток математики»

Очный тур

8 класс

Задания и возможные решения

Внимание! Задача считается решенной, если, помимо правильного ответа, приведены необходимые объяснения и вычисления.

1. Верно ли, что $\frac{x}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ является целым числом при любом целом x .

Приведя дроби к общему знаменателю и разложив числитель на множители,

получим:
$$\frac{x}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = \frac{2x + 3x^2 + x^3}{6} = \frac{x(x+1)(x+2)}{6}.$$

Так как в числителе стоят 3 последовательных целых числа, то одно из них обязательно делится на 2, и одно – на 3. Тогда произведение этих 3 чисел будет

делиться на 6, т.е. $\frac{x}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ является целым числом при любом целом x .

2. Найдите разность между наибольшим и наименьшим трехзначными числами, у каждого из которых совпадают частное и остаток при делении на 51.

Ответ: 884.

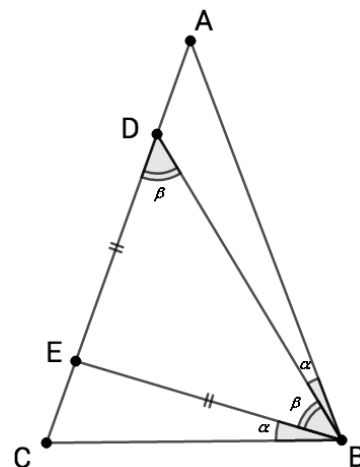
Рассматриваемые числа имеют вид: $x_n = 51n + n = 52n$, где n – натуральное число, не превосходящее 50. Так как они должны быть трехзначными, то наименьшее из них – это $x_2 = 52 \cdot 2 = 104$, а наибольшее – $x_{19} = 52 \cdot 19 = 988$. Их разность равна 884.

3. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отметили точку E . На отрезке AE отложили отрезок $ED = BE$. Найдите угол DBC , если известно, что $\angle CBE = \angle DBA$.

Ответ: 60° .

Решение. Так как треугольник DBE – равнобедренный, то $\angle EBD = \angle EDB = \beta$. Пусть

$\angle CBE = \angle DBA = \alpha$. Тогда $\angle B = \angle C = 2\alpha + \beta$, $\angle DBC = \alpha + \beta$ (см. рис.). По теореме о сумме углов для треугольника DBC : $\alpha + \beta + 2\alpha + \beta + \beta = 180^\circ$, значит, $\alpha + \beta = 60^\circ$.



4. В конкурсе участвовали 5 человек. На каждый вопрос один из них дал неправильный ответ, остальные – правильный. Число правильных ответов у Пети равно 10 – меньше, чем у любого другого. Число правильных ответов у Васи равно 13 – больше, чем у любого другого. Сколько всего вопросов было в конкурсе?

Ответ: 14

Так как на каждый вопрос были даны 4 правильных ответа, общее число правильных ответов делится на 4. Поскольку Петя дал 10 верных ответов, Вася – 13, а остальные трое – от 11 до 12, то общее число правильных ответов не меньше, чем $10 + 13 + 3 \cdot 11 = 56$, и не больше, чем $10 + 13 + 3 \cdot 12 = 59$. Из чисел в этих пределах только 56 кратно 4, поэтому число вопросов равно $56 : 4 = 14$.

5. Имеется 10 мешков с монетами по 100 монет в каждом мешке. Известно, что в девяти из них настоящие монеты весом 10 г каждая, а в одном фальшивые монеты весом 9 г каждая. Весы показывают общий вес положенных на них монет. За какое наименьшее число взвешиваний можно определить, в каком мешке фальшивые монеты?

Ответ: за 1 взвешивание

Положим на весы одну монету из первого мешка, две – из второго, три – из третьего, ...десять – из десятого. Весы тогда покажут вес $(550 - m)$ г, где m - число фальшивых монет на весах. Значит, в мешке с номером m будут фальшивые монеты. Понадобилось всего одно взвешивание.

Каждое задание оценивается в 7 баллов.