Государственное бюджетное учреждение дополнительного образования Псковской области
«Псковский областной центр развития одаренных детей и юношества»

Областной конкурс «Юные дарования» 2017/2018

«Юный знаток математики»

Очный тур

7 класс

Уважаемые участники, выполняйте задания на двойном тетрадном листе. На первой странице подпишите свою работу. Приводите подробные решения. Успеха!

1. Найдите наименьший целый корень уравнения:

$x(|x|-7)\left(\frac{3}{2}x+9\right)=0.$ (5 баллов)

2. Впишите вместо звёздочек шесть различных цифр так, чтобы все дроби были несократимыми, а равенство верным: $\frac{*}{*}+\frac{*}{*}=\frac{*}{*}$.

(7 баллов)

3. На диагонали *BD* квадрата *ABCD* взяты точки *E* и *F* так, что прямая *AE* пересекает сторону *BC* в точке *M*, прямая *AF* пересекает сторону *CD* в точке *N* и *CM* = *CN*. Найдите длину диагонали квадрата, если *BE* = 3, *EF* = 4.

(7 баллов)

4. Из клетчатого квадрата 7×7 по границам клеток вырезали равное количество квадратов 2×2 и прямоугольников 1×4. Какое наибольшее количество этих фигурок могло быть вырезано?

(7 баллов)

Государственное бюджетное учреждение дополнительного образования Псковской области
«Псковский областной центр развития одаренных детей и юношества»

Областной конкурс «Юные дарования» 2017/2018
«Юный знаток математики»
Очный тур
7 класс
ЗАДАНИЯ И ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ

1. Найдите наименьший целый корень уравнения:

$$\boldsymbol{x(|x|-7)\left(\frac{3}{2}x+9\right)=0}.$$

(5 баллов)

Ответ: наименьший целый корень уравнения $x=-7$.

$x=0$ или $|x|-7=0$ или $\frac{3}{2}x+9=0$

$x=0$ или $|x|=7$ или $\frac{3}{2}x=-9$

$x=0$ или $x=-7, x=7$ или $x=-6$.

2. Впишите вместо звёздочек шесть различных цифр так, чтобы все дроби были несократимыми, а равенство верным: $\frac{*}{*}+\frac{*}{*}=\frac{*}{*}$.

(7 баллов)

Ответ. Например, 1/ 6 + 7/3 = 5 /2 (есть и другие примеры).

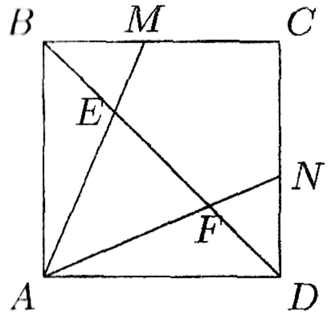
Комментарий. Поиск примера упрощается, если заметить, что ни один знаменатель не может быть равен ни 1 (тогда знаменатели оставшихся дробей совпадали бы), ни 5 или 7 (потому что если знаменатели двух несократимых дробей не делятся на простое число, то не делится на это простое число и знаменатель их суммы или разности).

3. На диагонали BD квадрата $ABCD$ взяты точки E и F так, что прямая AE пересекает сторону BC в точке M, прямая AF пересекает сторону CD в точке N и $CM = CN$. Найдите длину диагонали квадрата, если $BE = 3$, $EF = 4$.

(7 баллов)

Ответ: $AC = BD = 10$.

Из условия следует равенство треугольников ABM и ADN ($BM = DN$, $AB = AD$, $\angle ABM = \angle ADN$), откуда $\angle BAE = \angle DAF$. Кроме того, $AB = AD$ и $\angle ABE = \angle ADF$ (см. рис.). Поэтому треугольники ABE и ADF равны, и значит, $DF = BE = 3$.

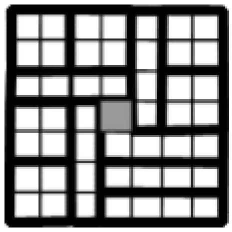


4. Из клетчатого квадрата 7×7 по границам клеток вырезали равное количество квадратов 2×2 и прямоугольников 1×4. Какое наибольшее количество этих фигурок могло быть вырезано?

(7 баллов)

Ответ: 12.

Как квадрат, так и прямоугольник, состоят из 4 клеток. Поэтому количество вырезанных фигур не больше, чем 49/4, то есть не больше 12. Фигур обоих типов поровну, поэтому квадратов 2×2 и прямоугольников 1×4 не более чем по 6. На рис. показано, как можно вырезать из квадрата по 6 квадратов 2×2 и прямоугольников 1×4.



Комментарий. Доказано только, что фигурок не больше двенадцати – 3 балла. Приведен только пример размещения 12 фигурок – 5 баллов.