

Областной конкурс «Юные дарования» 2017/2018
«Юный знаток математики»
Очный тур
8 класс

Уважаемые участники, выполняйте задания на двойном тетрадном листе. На первой странице подпишите свою работу. Приводите подробные решения. Успеха!

1. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению
 $x^2 - y^2 = 69$.

(7 баллов)

2. Можно ли из чисел 1, 2, 3, ..., 10 составить 5 таких дробей, чтобы их сумма была целым числом? Аргументируйте ответ.

(7 баллов)

3. Точка K – середина гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC . Точки L и M выбраны на катетах BC и AC соответственно так, что $BL = CM$. Докажите, что треугольник LMK – также прямоугольный равнобедренный.

(7 баллов)

4. Квадратная коробка 3×3 разделена на 9 ячеек. Разрешается в некоторые ячейки положить шарики (возможно, разное число в разные ячейки). Какое наименьшее число шариков нужно положить в коробку, чтобы во всех строках и столбцах коробки было разное количество шариков?

(7 баллов)

Государственное бюджетное учреждение дополнительного образования Псковской области
«Псковский областной центр развития одаренных детей и юношества»
Областной конкурс «Юные дарования» 2017/2018
«Юный знаток математики»
Очный тур
8 класс

ЗАДАНИЯ И ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ

1. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 - y^2 = 69.$$

(7 баллов)

Ответ: (35; 34) и (13; 10)

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 69 = 3 \cdot 23 = 69 \cdot 1 = 23 \cdot 3.$$

Но $x > y$, тогда $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 69, \end{cases}$ или $\begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 23. \end{cases}$

Решая данные системы, находим два решения: $x = 35, y = 34$ или $x = 13, y = 10$.

2. Можно ли из чисел 1, 2, 3, ..., 10 составить 5 таких дробей, чтобы их сумма была целым числом?

(7 баллов)

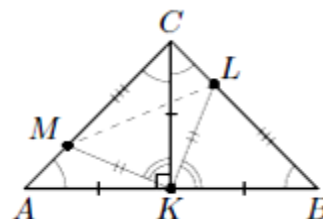
Ответ: можно. Например, $\frac{5}{10} + \frac{7}{2} + \frac{8}{4} + \frac{6}{3} + \frac{9}{1} = 17$

3. Точка K - середина гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC . Точки L и M выбраны на катетах BC и AC соответственно так, что $BL = CM$. Докажите, что треугольник LMK - также прямоугольный равнобедренный.

(7 баллов)

Медиана CK треугольника ABC является также высотой и биссектрисой, так как треугольник равнобедренный.

Поэтому $\angle KBC = \angle KCB = \angle KCA = 45^\circ$. Отсюда $KC = KB$, и значит, треугольники KBL и KCM равны



по двум сторонам ($KC = KB$, $BL = CM$) и углу между ними. Поэтому $KL = KM$, и из равенства $\angle BKL = \angle CKM$ следует $\angle LKM = \angle LKC + \angle CKM = \angle LKC + \angle BKL = \angle BKC = 90^\circ$.

Значит, треугольник LMK – также прямоугольный равнобедренный.

4. Квадратная коробка 3 на 3 разделена на 9 ячеек. Разрешается в некоторые ячейки положить шарики (возможно, разное число в разные ячейки). Какое наименьшее число шариков нужно положить в коробку, чтобы во всех строках и столбцах коробки было разное количество шариков?

(7 баллов)

Ответ: 8.

Решение: Сложим количества шариков во всех строках и столбцах. Так как это 6 различных неотрицательных чисел, то эта сумма составляет минимум $0+1+\dots+5 = 15$. Теперь заметим, что сумма чисел по строкам равна сумме чисел по столбцам, так как эти суммы равны количеству шариков во всей коробке. Поэтому сумма шести чисел равна удвоенной сумме чисел по строкам, то есть чётна. Итого, удвоенное количество шариков в коробке больше 15, то есть самих шариков больше 7.

0	0	0
0	0	2
1	3	2

Пример на 8 изображён рядом.