Государственное бюджетное учреждение дополнительного образования Псковской области
«Псковский областной центр развития одаренных детей и юношества»

Областной конкурс «Юные дарования» 2016/2017

«Юный знаток математики»

Финал

8 класс

8.1. Замените буквы цифрами в ребусе

Г + О = Л – О = В × О = Л – О = М – К = А

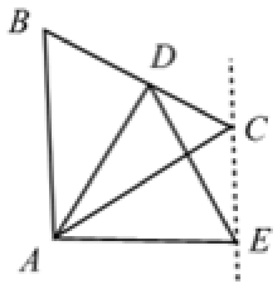
так, чтобы все равенства стали верными; при этом одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, а различным – различные. Найдите все решения ребуса. (7 баллов)

8.2. Известно, что размеры комнаты выражаются целыми числами метров. Каковы размеры комнаты, если разность площади пола и его периметра численно равна 3? (7 баллов)

8.3. На столе лежат три конфеты. У Ани и Лены есть мешок с неограниченным количеством конфет, и они играют в игру. Каждая из них своим ходом добавляет некоторое количество конфет из мешка на стол, но при этом не может положить больше конфет, чем уже лежит на столе. Девочки ходят по очереди, начинает Аня. Выигрывает та, после хода которой, на столе окажется ровно 2015 конфет. Кто из девочек может обеспечить себе победу, как бы ни играла соперница? (7 баллов)

8.4. Два равносторонних треугольника *ABC* и *ADE* расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что прямые *AB* и *CE* параллельны.

(7 баллов)



8.5. Братья нашли клад из золота и серебра. Они разделили его так, что каждому досталось по 100 кг. Старшему досталась 1/5 всего золота и 1/7 всего серебра, а младшему – 1/7 всего золота. А какая доля общего серебра досталась младшему брату? (7 баллов)

Государственное бюджетное учреждение дополнительного образования Псковской области
«Псковский областной центр развития одаренных детей и юношества»
Областной конкурс «Юные дарования» 2016/2017

«Юный знаток математики»

Финал

8 класс

ЗАДАНИЯ, ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

8.1. Замените буквы цифрами в ребусе

Г + О = Л – О = В × О = Л – О = М – К = А

так, чтобы все равенства стали верными; при этом одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, а различным – различные. Найдите все решения ребуса. (7 баллов)

__Ответ:__$4 + 2 = 8 – 2 = 3×2 = 8 – 2 = 7 – 1 = 6$.

Поскольку различным буквам соответствуют различные цифры, то из равенства В×О = А следует, что ни В, ни О не равны 1. Следовательно, А – однозначное составное число, которое можно разложить на два различных множителя. Следовательно, А = 6 или А = 8.
Если А = 8, то Л > 9 не меньше десяти, что невозможно.
Итак, А = 6. Осталось рассмотреть два случая.

1) В = 2, О = 3. Тогда Г также равно 3, что невозможно.
2) В = 3, О = 2. Тогда Л = 8, Г = 4, М = 7, К = 1.

8.2. Известно, что размеры комнаты выражаются целыми числами метров. Каковы размеры комнаты, если разность площади пола и его периметра численно равна 3? (7 баллов)

__Ответ__: 3 м×9 м.

Обозначим размеры комнаты через m метров и n метров. По условию, $mn - 2(m + n) = 3$. Тогда $m(n - 2) = 3 + 2n$ или, если $n \neq 2$ м, то $m = \frac{3+2n}{n-2} = 2 + \frac{7}{n-2}$.

Число $\frac{7}{n-2}$ — целое положительное при двух значениях n:

$n_1 = 3$ и $n_2 = 2 + 7 = 9$.

Тогда $m_1 = 2 + 7 = 9$, $m_2 = 2 + 1 = 3$.

Следовательно, комната имеет размеры 3 м×9 м.

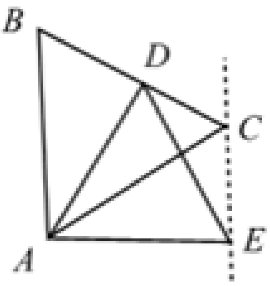
8.3. На столе лежат три конфеты. У Ани и Лены есть мешок с неограниченным количеством конфет, и они играют в игру. Каждая из них своим ходом добавляет некоторое количество конфет из мешка на стол, но при этом не может положить больше конфет, чем уже лежит на столе. Девочки ходят по очереди, начинает Аня. Выигрывает та, после хода которой, на столе окажется ровно 2015 конфет. Кто из девочек может обеспечить себе победу, как бы ни играла соперница? (7 баллов)

Ответ: Выиграет Аня.

Заметим, что девочка, перед ходом которой на столе лежит 1007 конфет, обязательно проиграет. Действительно, после ее хода на столе будет лежать от 1008 до 2014 конфет, и ее соперница в любом случае сможет получить 2015 конфет. Значит, девочка, после хода которой, на столе окажется 1007 конфет, выиграет. Аналогично рассуждая, получим все выигрышные позиции, которые соответствуют 6, 14, 30, 62, 125, 251, 503, 1007 конфетам на столе. Таким образом, Аня первым ходом может попасть в выигрышную позицию, сделав 6 конфет. После этого на каждый ход Лены Аня отвечает переходом в следующую выигрышную позицию, пока не перейдет в позицию 2015.

8.4. Два равносторонних треугольника *ABC* и *ADE* расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что прямые *AB* и *CE* параллельны.

(7 баллов)



Во-первых, $\angle BAD + \angle DAC = 60^0 = \angle DAC + \angle CAE$, значит, углы *BAD* и *CAE* равны.
Во–вторых, $AB = AC$ и $AD = AE$, значит, треугольники *BAD* и *CAE* равны по первому признаку равенства треугольников. Из этого равенства следует равенство углов *ABD* и *ACE*, причём оба угла равны по 60^0. Кроме того, сумма углов *BCA* и *ACE* составляет 120^0.Осталось заметить, что сумма односторонних углов *ABC* и *BCE* равна 180^0, тогда по признаку параллельности двух прямых *AB* и *CE* параллельны.

8.5.Братья нашли клад из золота и серебра. Они разделили его так, что каждому досталось по 100 кг. Старшему досталась 1/5 всего золота и 1/7 всего серебра, а младшему — 1/7 всего золота. А какая доля общего серебра досталась младшему брату? (7 баллов)

Ответ: 9/49.
1) Пусть масса золота в кладе равна z кг, а масса серебра – s кг. Старшему брату досталось $z/5 + s/7$ кг; это меньше $(z+s)/5$, но больше $(z+s)/7$. Из этого следует, что братьев больше пяти, но меньше семи, то есть их шестеро.
2) Теперь получаем систему уравнений: $\begin{cases} \frac{z}{5} + \frac{s}{7} = 100 \\ z + s = 600 \end{cases}$
Решаем: $\frac{z}{5} + \frac{s}{7} = \frac{z}{6} + \frac{s}{6} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) z = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) s \Leftrightarrow \frac{z}{30} = \frac{s}{42} \Leftrightarrow z = \frac{5}{7} s$. Поскольку $z + s = 600$, то $z = 250$, $s = 350$.
3) Младший брат получил 250/7 кг золота; значит, ему досталось $100 - 250/7 = 450/7$ кг серебра. Доля этого серебра от всего серебра в кладе составляет $\frac{\frac{450}{7}}{350} = \frac{9}{49}$.