

Государственное бюджетное учреждение дополнительного образования Псковской области
 «Псковский областной центр развития одаренных детей и юношества»
 Областной конкурс «Юные дарования» 2017/2018
 «Юный знаток математики»

Финал
 6 класс

Задания и возможные решения

6.1. В доме на всех этажах во всех подъездах равное количество квартир (больше одной). Также во всех подъездах поровну этажей. При этом количество этажей больше количества квартир на этаже, но меньше, чем количество подъездов. Сколько в доме этажей, если всего квартир 715?

Ответ: 11.

Решение. Обозначим количество квартир на этаже за K , количество этажей за \mathcal{E} и количество подъездов за Π . По условию, $1 < K < \mathcal{E} < \Pi$. Число 715 можно разложить на большие единицы множители единственным способом: $715 = 5 \cdot 11 \cdot 13$. Значит, $K = 5$, $\mathcal{E} = 11$, $\Pi = 13$.

6.2. Покрасьте клетки доски 5×5 в пять цветов так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждом выделенном блоке встречались все цвета.

Возможный ответ:

1	5	3	2	4
2	3	1	4	5
3	4	5	1	2
5	2	4	3	1
4	1	2	5	3

В решении помогут следующие рассуждения. Введём на нашем квадрате координаты (как в шахматах).

5					
4					
3					
2					
1					
	a	b	c	d	e

Раскрасим левый верхний блок: пусть клетка $a5$ окрашена в цвет 1, $a4$ – в цвет 2, $b4$ – в цвет 3, $b3$ – в цвет 4, $c3$ – в цвет 5. Тогда, очевидно, клетку $a3$, можно покрасить только в цвет 3

5	1				
4	2	3			
3	3	4	5		
2					
1					
	a	b	c	d	e

Рассмотрим верхний центральный блок. В нём клетка цвета 3 должна стоять на пятой горизонтали. Следовательно, в левом верхнем блоке клеткой цвета 3 может быть только d2 (рис. справа).

5	1				
4	2	3			
3	3	4	5		
2				3	
1					
	a	b	c	d	e

Раскраска остальных клеток с помощью аналогичных рассуждений восстанавливается однозначно в следующем порядке: c5, e1, d1, b5, d5, e5, d4, d3, c4, e4, e3, e2, a2, a1, b2, b1, c2, c1.

Существуют и другие решения.

6.3. На доске написано число 49. За один ход разрешается либо удваивать число, либо стирать его последнюю цифру. Можно ли за несколько ходов получить число 50?

Ответ. Можно.

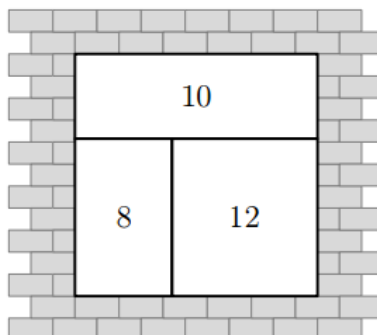
Решение. Число 50 можно получить, удвоив 25, а 25 можно получить, стерев последнюю цифру числа 256, которое является степенью двойки. Таким образом, необходимая цепочка преобразований может выглядеть так: $49 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64 \rightarrow 128 \rightarrow 256 \rightarrow 25 \rightarrow 50$. Существуют и другие решения.

6.4. За круглым столом сидит 120 человек – рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. Каждый из них сделал ровно одно из двух следующих утверждений: 1) «Мой сосед справа – рыцарь»; 2) «Тот, кто находится через одного справа от меня – рыцарь». Сколько всего лжецов могло находиться за столом? (Не забудьте объяснить свой ответ.)

Ответ: 0, 60, 120.

Решение. Варианты, когда все сидящие за столом – лжецы, или все сидящие за столом – рыцари, очевидно, подходят. Допустим, за столом есть как рыцари, так и лжецы. Тогда найдется лжец (Л), правый сосед которого – рыцарь (Р). Л не мог сделать заявления 1). Поэтому он сделал заявление 2), и справа от Р сидит лжец (Л2). Значит, Р также не мог сделать заявление 1, т.е. сделал заявление 2), то есть за Л2 – снова рыцарь. Продолжая рассуждение, убеждаемся, что рыцари и лжеца за столом чередуются.

6.5. Квадратный оконный проём образован тремя прямоугольными рамами (рис. ниже). Внутри каждой из них написали число, равное периметру рамы. Напишите, чему равна сторона квадрата всего оконного проёма и объясните, как вы её получили.



Ответ: 4.

Решение. Пусть сторона квадрата равна a , а высота левого нижнего проёма равна b , ширина левого нижнего проёма равна c . Тогда высота верхнего прямоугольника равна $a-b$, ширина равна a ; высота правого прямоугольника равна b , ширина равна $a-c$. Выпишем соотношения периметров трёх прямоугольников: $2a + 2a - 2b = 10$; $2b + 2c = 8$; $2b + 2a - 2c = 12$. Сложим два последних равенства, получим $2a + 4b = 20$. Прибавим к результату удвоенное первое равенство, останется $10a = 40$, откуда $a = 4$.