Государственное бюджетное учреждение дополнительного образования Псковской области

«Псковский областной центр развития одаренных детей и юношества»

Областной конкурс «Юные дарования» 2017/2018

«Юный знаток математики»

Финал

7 класс

Задания и возможные решения

7.1. Сколькими способами из цифр 1, 2, 3, 4 можно составить число, кратное 6? При составлении числа каждую цифру можно использовать один раз или не использовать совсем.

Ответ: 9.

Решение. Число делится на 6, тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3. Число, составленное из цифр 1, 2, 3, 4 делится на 2, если и только если его последняя цифра чётная, то есть 2 или 4. Число делится на 3, тогда и только тогда, когда его сумма цифр делится на 3. В нашей ситуации такое возможно для следующих наборов цифр: {1, 2}, или {1, 2, 3}, или {2, 4}, или {2, 3, 4} имеем 1 вариант в первом случае, по 2 варианта во втором и третьем, 4 в последнем случае. Итого 9 вариантов.

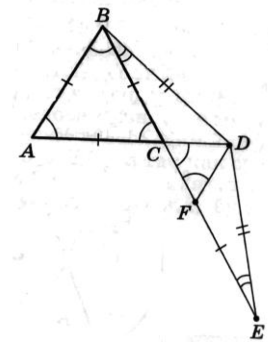
7.2. Числа *x* и *y* таковы, что $x + y = xy = 17$. **Найдите значение выражения:**

$$\left(x^2 - 17x\right)\left(y + \frac{17}{y}\right).$$

Ответ: -289

$x - 17 = -y, \frac{17}{y} = x$. Искомое выражение равно: $x(x-17)(y+x) = -xy \cdot 17 = -289$.

7.3. Дан правильный треугольник *ABC*. На продолжении стороны *AC* за точку *C* взята точка *D*, а на продолжении стороны *BC* за точку *C* – точка *E* так, что *BD* = *DE*.Докажите, что *AD*= *CE*.



На отрезке *CE* отметим точку *F* такую, что *FE*= *BC* Треугольники *BDC* и *EDF* равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда *CD* =*DF*.

Далее, поскольку

$\angle DFC = \angle DCF = \angle ACB = 60^0$, треугольник *CDF* равносторонний. Поэтому *CF*=*CD* *и* *AD*=*AC*+*CD*= *BC*+*CF*= *CE*. Что и требовалось доказать.

7.4. На острове Логики живут 40 рыцарей (всегда говорящих правду), 25 лжецов (всегда говорящих неправду) и несколько софистов. Софист может произносить только такие фразы, которые на его месте не смогли

бы сказать ни рыцарь, ни лжец. Например, стоя рядом со лжецом, софист может произнести фразу «Мы оба лжецы» (потому что, если бы он был рыцарем, то такая фраза была бы ложью, а если бы он был лжецом, она была бы истиной). Однажды софист произнёс два утверждения о жителях острова:
1. "На острове живут ровно ... лжецов".
2. "Софистов на острове не больше, чем лжецов".
Восстановите первое утверждение софиста. Сколько на острове софистов?

Ответ.
1) На острове живут ровно 26 лжецов;
2) 27 софистов.
Решение.
1) Если бы софист был лжецом, он должен сказать правду, и тогда он скажет, что лжецов 25+1=26. А если бы он был рыцарем, лжецов будет 25, и он сказал неправду.
2) Пусть С- количество всех софистов на острове. Если бы софист был лжецом, он должен сказать правду, и тогда он скажет, что $С-1 \leq 25+1$, или $С\leq 27$. Если бы софист был рыцарем, он должен сказать неправду, и тогда верно будет, что $С-1>25$, или $С>26$. Единственное натуральное число, удовлетворяющее обоим неравенствам, это 27.

7.5. На доске 5×5 расположен крест из пяти клеток (клетка и все её соседи). Какое наименьшее число детекторов нужно поместить в клетки доски, чтобы точно определить положение креста? (Детектор показывает, принадлежит клетка кресту или нет, и срабатывают детекторы одновременно.)
Ответ: 4.
Решение. Всего положений креста на доске 9, столько же, сколько положений центральной клетки креста. У детектора два состояния, значит всего возможных состояний трёх детекторов $2^3=8$ и, значит, с их помощью нельзя различить 9 положений креста.
Примеры возможного расположения четырёх детекторов показаны на рисунках: