

Государственное бюджетное учреждение дополнительного образования Псковской области  
«Псковский областной центр развития одаренных детей и юношества»  
Областной конкурс «Юные дарования» 2017/2018  
**«Юный знаток математики»**

Финал

**8 класс**

**Задания и возможные решения**

**8.1. Чтобы открыть сейф, нужно ввести код- число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем троек, а код делится и на 3, и на 4. Придумайте код, открывающий сейф.**

*Ответ:* 2222232

Так как двоек больше, чем троек, двоек может быть 4, 5, 6 или 7. В первом случае сумма цифр -17, во втором -16, а в третьем - 15, а в последнем -14. По признаку делимости на 3 число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Значит, только третий вариант.

Итак, в коде 6 двоек и 1 тройка. По признаку делимости на 4 число, образованное последними двумя цифрами, должно делиться на 4. значит, это 32.

**8.2. Найдите наименьшее натуральное число, которое можно получить при подстановке натуральных чисел вместо переменных в следующее выражение  $13x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 6xz + y$ .**

*Ответ:* 2.

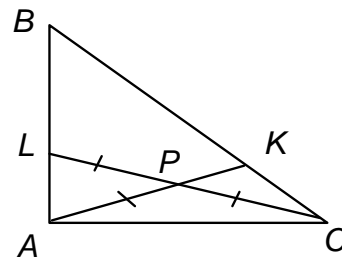
Заметим, что  $13x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 6xz + y = (2x - y)^2 + (3x - z)^2 + y$ .

Поскольку квадрат целого числа всегда неотрицательное число, он достигает минимума, когда равен 0. Натуральное число  $y$  не меньше 1. Если же  $y = 1$ , то число  $(2x - y)$  — нечётное и его квадрат также не меньше 1. Поэтому выражение (1) не меньше 2 для любых натуральных  $x, y, z$ . Значение 2 может быть достигнуто несколькими способами, например,  $x = 1, y = 2, z = 3$  или  $x = 1, y = 1, z = 3$ .

**8.3. На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбрана точка  $K$  так, что  $AB = AK$ . Отрезок  $AK$  пересекает биссектрису  $CL$  в ее середине. Найдите острые углы треугольника  $ABC$ .**

*Ответ.*  $\angle B = 54^\circ, \angle C = 36^\circ$ .

Решение. Обозначим середину биссектрисы  $CL$  через  $P$ , а угол  $ABC$  через  $\beta$ ; тогда  $\angle ACL = (90^\circ - \beta)/2$ . В прямоугольном треугольнике  $ACL$  отрезок  $AP$  является медианой, поэтому  $AP = CP = LP$ . Теперь из равнобедренных треугольников  $APL$  и  $ABK$  получаем  $\angle ALP = \angle LAP = \angle BAK = 180^\circ - 2\angle ABK = 180^\circ - 2\beta$ .



С другой стороны,  $\angle ALP = \angle ABC + \angle LCB$  как внешний угол в  $\triangle BCL$ . Значит,  $180^\circ - 2\beta = \beta + (90^\circ - \beta)/2$ , откуда  $5\beta/2 = 135^\circ$ , то есть  $\beta = 54^\circ$ . Тогда  $\angle ACB = 90^\circ - \angle ABC = 36^\circ$ .

**8.4. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. В футбольной сборной острова 11 человек. Игрок под номером 1 сказал: «В нашей команде рыцарей столько же, сколько лжецов. Игрок под номером 2 сказал: «В нашей команде число рыцарей и число лжецов отличается на один» и т.д. Игрок под номером 11 сказал: «В нашей команде число рыцарей и число лжецов отличается на десять». Сколько рыцарей в сборной и, если они есть, под какими номерами они играют? Найдите все возможные варианты ответа на этот вопрос.**

*Ответ:* рыцарей либо нет совсем, либо он один и играет под номером 10.

Решение: два ответа правдивыми быть не могут, поскольку они противоречат друг другу. Значит, есть не более одного правдивого ответа. Если нет ни одного правдивого ответа, то в команде одни лжецы, в этом случае действительно ни один из ответов не являются правдивым. Если в команде 1 рыцарь и 10 лжецов, то правдивым является ответ игрока под номером 10, а остальные ответы оказываются лживыми.

**8.5. Имеется бумажный квадрат  $7 \times 7$ , все клетки которого белые. Какое наименьшее число клеток нужно выкрасить в чёрный цвет, чтобы из квадрата нельзя было выстричь прямоугольник, в котором не менее 10 клеток, и все они белого цвета?**

*Ответ:* 4.

Решение. Разобьём квадрат  $7 \times 7$  на 5 прямоугольников (см. рис.): четыре  $3 \times 4$  и квадрат  $1 \times 1$  (см. рис.): Если закрашено только три клетки, то найдётся белый прямоугольник из 12 клеток. Как закрасить 4 клетки показано на следующем рисунке.

